

Streng singuläre Operatoren in lokalkonvexen Räumen

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik

der Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu Frankfurt am Main

von

Adolf Müller

Gelnhausen

Frankfurt 1971

Mit Genehmigung zum Druck gekürzt.

Ein Exemplar der ungekürzten Arbeit liegt in der Sencken-
bergischen Bibliothek der Universität vor.

Dekan: Prof.Dr.Franz

Erster Berichterstatter: Prof.Dr.Dr.G.Köthe

Zweiter Berichterstatter: Prof.Dr.J.Weidmann

Tag der mündlichen Prüfung: 19.10.1971

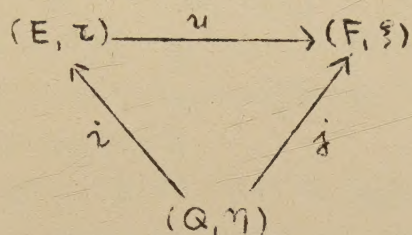


Streng singuläre Operatoren in lokalkonvexen Räumen

Der Begriff des streng singulären Operators geht auf Kato zurück. Er definierte ihn in seiner Arbeit [1] folgendermaßen: Seien E, F Banachräume und $u: E \rightarrow F$ stetig linear. Genau dann ist u streng singulär, wenn es keinen unendlichdimensionalen Teilraum $M \subset E$ gibt, sodaß u auf M ein beschränktes Inverses besitzt. Eine Zusammenfassung der Eigenschaften streng singulärer Operatoren findet man bei Mil'man. [1].

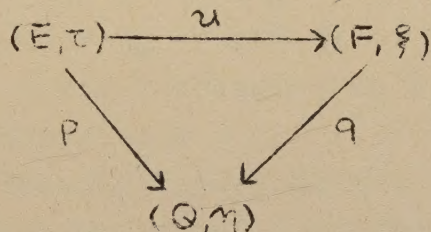
In dieser Arbeit werden Eigenschaften streng singulärer Operatoren zwischen lokalkonvexen Räumen untersucht.

Definition: $u \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt streng singulär, genau dann, wenn gilt:



$j = u \circ i$ topologischer Monomorphismus, i topologischer Monomorphismus $\Rightarrow \dim Q < \infty$

Definition: $v \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt streng kosingulär, genau dann, wenn gilt:



$p = q \circ u$, q topologische Epimorphismen $\Rightarrow \dim Q < \infty$

Es bezeichne $S(E, F)$ die Menge aller streng singulären und $S^*(E, F)$ die Menge aller streng kosingulären Operatoren von E in F . Dann resultieren aus diesen Definitionen die beiden folgenden Sätze:

Satz 1:

- (1) $u \in S(E, F), v \in \mathcal{L}(E, G) \Rightarrow vu \in S(E, G)$
- (2) $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in S(F, G) \Rightarrow vu \in S(E, G)$

Satz 2:

- (1) $u \in S^*(E, F), v \in \mathcal{L}(F, G) \Rightarrow vu \in S^*(E, G)$
- (2) $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in S^*(F, G) \Rightarrow vu \in S^*(E, G)$

Sei $N = \text{Kern } u$ der Kern von $u: (E, \tau) \rightarrow (F, \xi)$ so läßt sich u faktorisieren durch $u = j_0 \circ \bar{u} \circ k$ mit j_0 topologischem Monomorphismus k topologischem Epimorphismus. Es werde $E_k = E/N$ und $G = \text{Im } u$ gesetzt.

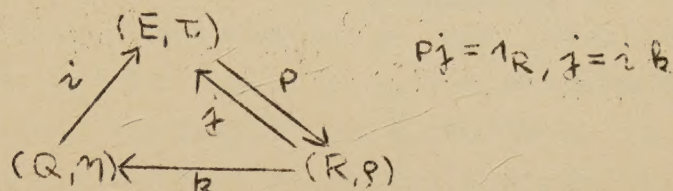
Satz 3: Hat N ein topologisches Komplement in E , so gilt

$$u \in S(E, F) \Leftrightarrow \bar{u} \in S(E_k, G)$$

Satz 4: Hat G ein topologisches Komplement in F , so gilt

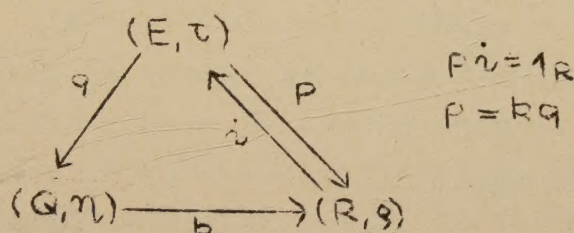
$$u \in S^*(E, F) \Leftrightarrow \bar{u} \in S^*(E_k, G)$$

Definition: Ein Raum (E, τ) heißt subprojektiv, genau dann, wenn das untere Diagramm kommutativ wird



mit $\dim Q = \dim R = \infty$, i, j, k topologischen Monomorphismen und p topologischem Epimorphismus.

Definition: Ein Raum (E, τ) heißt superprojektiv, genau dann, wenn das untere Diagramm kommutativ wird



mit $\dim Q = \dim R = \infty$, p, k, q topologischen Epimorphismen und i topologischem Monomorphismus.

Dann gelten die folgenden beiden Sätze:

Satz 5: Ist F subprojektiv und u streng kosingulär, so ist u streng singular.

Satz 6: Ist E superprojektiv und u streng singular, so ist u streng kosingulär.

Definition: Ein Raum E hat die Dunford-Pettis-Eigenschaft (abgekürzt D.P.-Eigenschaft) genau dann, wenn gilt: Jede stetige lineare Abbildung von E in einen separierten, quasivollständigen lokalkonvexen Raum F , die beschränkte Mengen in schwach relativ kompakte Teilmengen wirft, bildet jede absolutkonvexe schwach kompakte Teilmenge von E in relativ kompakte Teilmengen von F ab.

Dann gelten die beiden folgenden Sätze:

Satz 7: Sei $u: E \rightarrow F$ und F quasivollständiger, lokalkonvexer separierter Raum und sei u schwach kompakt. Hat E die D.P.-Eigenschaft, so ist u streng singulär.

Satz 8: Sei $u: E \rightarrow F$ und F quasivollständiger, lokalkonvexer separierter Raum und sei u schwach kompakt. Hat F die D.P.-Eigenschaft, so ist u streng kosingulär.

Definition: $u \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt fast schwach kompakt, genau dann, wenn gilt: Jeder Raum Q für den $i: Q \rightarrow E, j = u \circ i: Q \rightarrow F$ topologische Monomorphismen sind, ist reflexiv.

Definition: $u \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt ein R-Operator, genau dann, wenn gilt: Zu jedem Raum Q mit $\dim Q = \infty$ und jedem topologischen Monomorphismus $i: Q \rightarrow E$ gibt es ein R mit $\dim R = \infty$ und einen topologischen Monomorphismus $j: R \rightarrow Q$ so daß das untere Diagramm mit schwach kompaktem k kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccc} (E, \tau) & \xrightarrow{u} & (F, \xi) \\ \uparrow i & & \uparrow k \\ (Q, \eta) & \xleftarrow{j} & (R, \zeta) \end{array}$$

Definition: Ein Operator $u: (E, \tau) \rightarrow (F, \xi)$ heißt beschränkt, wenn $u\tau$ eine beschränkte Teilmenge enthält.

Definition: $u \in \mathcal{L}(E, F)$ heißt vollstetig, wenn gilt: Ist $\mathcal{u}$ schwach konvergenter Filter von E , so ist $u\mathcal{u}$ konvergenter Filter von F .

Satz 9: Sei $u \in \mathcal{L}(E, F)$ beschränkt.

Ist u fast schwach kompakt und vollstetig, so ist u streng singulär.

Satz 10: Ist u ein R-Operator und vollstetig, so ist u streng singulär.

Satz 11: Sei $u \in \mathcal{L}(E, F)$ beschränkt und

- (1) E semireflexiv
- (2) u vollstetig

Dann ist u streng singulär.

Satz 12: Seien $(E, E'), (F, F')$ duale Paare, so gilt:

$$u \in S(\tau, \xi) \Rightarrow u' \in S^*(\tau', \xi')$$

Satz 13: Sei (E, E') duales Paar und bezeichne μ Mackeytopologie auf E , μ' die Mackeytopologie auf E' ; so gilt:

- (1) (E, μ) subprojektiv $\Leftrightarrow (E', \mu')$ superprojektiv
- (2) (E, μ) superprojektiv $\Leftrightarrow (E', \mu')$ subprojektiv.

Satz 14: Seien (E, μ) , (E', μ') metrisierbar, so gilt:

- (1) $u \in S(\mu, \mu) \Rightarrow u' \in S^*(\mu', \mu')$
- (2) $u \in S^*(\mu, \mu) \Rightarrow u' \in S(\mu', \mu')$.

Satz 15: Die Menge aller streng singulären Operatoren auf E bildet ein σ -Ideal.

Satz 16: Die Menge aller streng kosingulären Operatoren auf E bildet ein τ -Ideal.

Für die Definition des σ -Ideals bzw. τ -Ideals siehe Heuser [1].

Satz 17:

- (1) Ist $u \in S(E)$ und E superprojektiv, so ist $S(E)$ ein σ -Ideal.
- (2) Ist $u \in S^*(E)$ und E subprojektiv, so ist $S^*(E)$ ein τ -Ideal.

Satz 18: Sei $u_\lambda = 1 - \lambda u$, $\lambda \neq 0$ und E folgenvollständig und u p -beschränkt.

- (1) Ist $u \in S(E)$ und E superprojektiv, so ist u_λ eine Rieszsche Transformation.
- (2) Ist $u \in S^*(E)$ und E subprojektiv, so ist u_λ eine Rieszsche Transformation.

Calkin: Ann.Math., 42, No. 4, 1941

Edwards: Functional Analysis, Holt, Rinehart, Winston 1965

Gokhberg, Markus: Izv.Mold.Akad.Nauk SSSR, 10, 51-59, 1960

Goldberg: Unbounded Linear Operators, McGraw-Hill 1966

R.H.Herman: Generalisations of weakly compact Operators,
Trans.Am.Math.Soc., 132, 1968

Heuser: Atkinson- und Fredholmoperatoren, Vorlesung
Frankfurt SS 1968

Kato: Perturbation Theory for Nullity, Deficiency and
other Quantities of linear Operators,
J.d'Analyse Math., Vol. 6, 1958

Mil'man: Some Properties of strictly singular Operators,
Funct.Analy.Appl. 3, 1-4, 1969

Pelczynski: On strictly singular and strictly cosingular
Operators I, II
Bull.de L'Acad.Polon.d.sciences, Vol. 13, 1965

Pietsch: Zur Theorie der Φ -Transformationen in lokal-
konvexen Vektorräumen, Math.Nachr. 21, 1960

Vladimirski: Φ -Operatoren in lokalkonvexen Räumen,
Usp.Math.Nauk 1962, 23

Whitley: Strictly singular Operators and their Conjugates
Trans.Am.Math.Soc. Vol. 13, No. 2, 1964

Lebenslauf

Am 3.3.1942 wurde ich, Adolf Müller, als zweiter Sohn des Arbeiters Emil Müller und seiner Ehefrau Anna, geb.Kümmel in Gelnhausen geboren.

Ostern 1949 wurde ich in die dortige Volksschule eingeschult.

Im Frühjahr 1953 bestand ich die Aufnahmeprüfung zum Besuch des Realgymnasiums Gelnhausen. 1963 bestand ich dort das Abitur und studierte anschließend an der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt Mathematik. 1965 legte ich die Diplomvorprüfung für Mathematiker mit der Gesamtnote 'gut' ab. In meiner Diplomarbeit beschäftigte ich mich mit der Theorie der streng singulären Operatoren in B-Räumen. 1969 legte ich die Diplomprüfung für Mathematiker mit der Gesamtnote 'sehr gut' ab.

Um meine Doktorarbeit anzufertigen, beschäftigte ich mich auf Anregung von Herrn Prof.Dr.Köthe mit der Theorie der streng singulären Operatoren in lokalkonvexen Räumen.

Am 1.5.1969 trat ich jedoch als Diplommathematiker in die Farbwerke Hoechst, Abteilung für Praktische Mathematik, ein. Dort hatte ich Gelegenheit, die praktische Tätigkeit eines Mathematikers kennenzulernen. Mein Arbeitsbereich umfaßte hauptsächlich die Lösung statistischer Probleme und Meßblendenrechnungen.

Zum 30.9.1970 kündigte ich, um als wissenschaftliche Hilfskraft im Mathematischen Seminar der Universität Frankfurt meine bereits begonnene Doktorarbeit unter Anleitung von Herrn Prof.Dr.Köthe fertigstellen zu können.

Meine akademischen Lehrer waren:

Prof. Baer

Prof. Bauer

Prof. Behrens

Prof. Benz

Prof. Bilz

Prof. Cramer

Prof. Dänzer

Dr. Dembowski

Prof. Doiwa

Prof. Fischer

Prof. Franz

Prof. Heuser

Prof. Köthe

Prof. Kulze

Prof. Martienssen

Prof. Moufang

Prof. Mrowka

Prof. Müser

Prof. Salzmann

Dr. Sauer

Prof. Stummel

Prof. Süßmann

